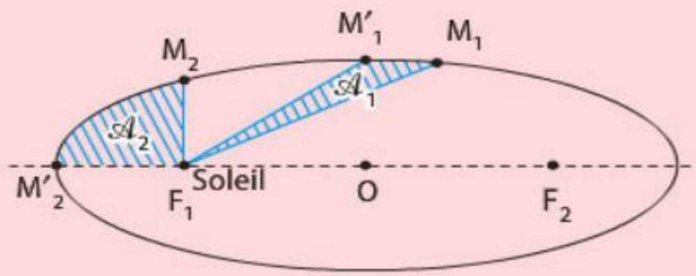
Exercice : les lois de Kepler

type

Des lois de Kepler à l'étude d'un astéroïde

1. Planètes en orbite elliptique

La figure ci-contre représente la trajectoire elliptique du centre d'inertie M d'une planète du système solaire de masse m dans le référentiel héliocentrique considéré galiléen. Les deux foyers F_1 et F_2 de l'ellipse et son centre O sont indiqués.

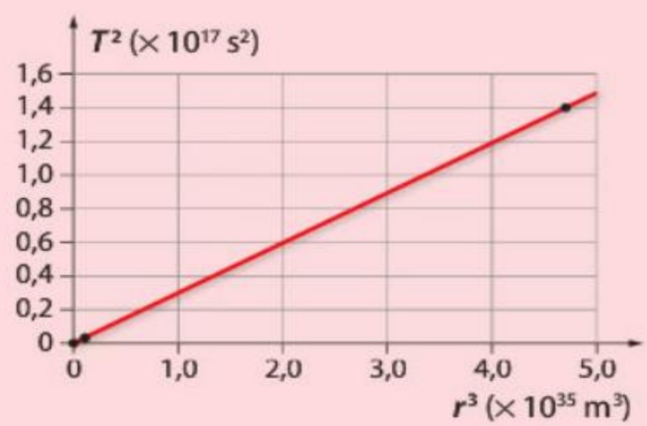


a. Énoncer la première loi de Kepler. Justifier alors la position du Soleil sur cette figure.

b. On suppose que les durées de parcours entre les points M_1 et M'_1 puis M_2 et M'_2 sont égales. Énoncer la deuxième loi de Kepler, puis en déduire la relation entre les aires $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$.

2. Planètes en orbite circulaire

Dans cette partie, pour simplifier, on modélise les trajectoires des planètes du système solaire dans le référentiel héliocentrique par des cercles de rayon r, dont le centre O est le Soleil de masse M_S. Le graphe ci-contre représente l'évolution du carré de la période de révolution des planètes Terre, Mars et Jupiter en fonction du cube du rayon de leur orbite.



a. Énoncer la troisième loi de Kepler. Ce graphe est-il en accord avec cette loi ?

b. En utilisant ce graphe, montrer que $\frac{T^2}{r^3} = 3{,}0 \times 10^{-19}$ USI, puis déterminer l'unité de ce rapport et en déduire la valeur de la masse M_S du Soleil.

3. Étude de l'astéroïde Rhea Sylvia

L'astéroïde Rhea Sylvia gravite à une distance constante du Soleil avec une période de révolution de 6,521 ans. En déduire la distance r_R séparant les centres respectifs de l'astéroïde et du Soleil.

Données. *Constante de gravitation universelle :* $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}$. *1 an = 365 j.*

➤ Coups de pouce

1. a. Le Soleil est confondu avec un point particulier de l'ellipse.

2. a. Les points sont alignés suivant une droite passant par l'origine.

b. Déterminer le coefficient directeur de cette droite.

On a : $3{,}0 \times 10^{-19} = \dfrac{4\pi^2}{G \cdot M_S}$.

3. Le rapport $\dfrac{T^2}{r^3}$ est le même pour tous les corps qui gravitent autour du Soleil.

EXEMPLE DE RÉSOLUTION

1. a. La première loi de Kepler énonce que, dans le référentiel héliocentrique, l'orbite d'une planète est **une ellipse dont le centre du Soleil occupe un des deux foyers.** Le centre du Soleil est ici **confondu avec le foyer F_1**.

b. La deuxième loi de Kepler énonce que le segment reliant le Soleil à la planète balaye des aires égales pendant des durées égales. Comme les durées de parcours sont égales, on a : $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$.

2. a. La troisième loi de Kepler énonce que le rapport entre le carré de la période de révolution T de chaque planète et le cube du rayon r de son orbite circulaire est constant, soit :

$\dfrac{T^2}{r^3} = \mathbf{k = constante}$; avec T en seconde (s) et r en mètre (m). k est une constante qui ne dépend que de l'astre attracteur : le Soleil.

$k = \dfrac{4\pi^2}{G \cdot M_S}$, où M_S est la masse du Soleil en kilogramme (kg).

Les points sont alignés suivant une droite passant par l'origine donc **T^2 est proportionnelle à r^3**. La troisième loi de Kepler est bien vérifiée : le rapport entre le carré de la période de révolution des planètes et le cube du rayon de leur orbite est constant.

b. Soit a le coefficient directeur de la droite du graphe précédent,

on a : $\dfrac{T^2}{r^3} = a = \dfrac{1{,}2 \times 10^{17}}{4{,}0 \times 10^{35}} = \mathbf{3{,}0 \times 10^{-19}\ s^2 \cdot m^{-3}}$.

De plus, $a = \dfrac{4\pi^2}{G \cdot M_S}$ donc $M_S = \dfrac{4\pi^2}{G \cdot a}$.

A.N. : $M_S = \dfrac{4\pi^2}{6{,}67 \times 10^{-11} \times 3{,}0 \times 10^{-19}}$. Soit $\boxed{M_S = 2{,}0 \times 10^{30}\ \text{kg}}$

3. $r_R = \sqrt[3]{\dfrac{T^2}{3{,}0 \times 10^{-19}}} = \sqrt[3]{\dfrac{(6{,}521 \times 365 \times 24 \times 3\,600)^2}{3{,}0 \times 10^{-19}}}$

Donc $\boxed{r_R = 5{,}2 \times 10^{11}\ \text{m}}$